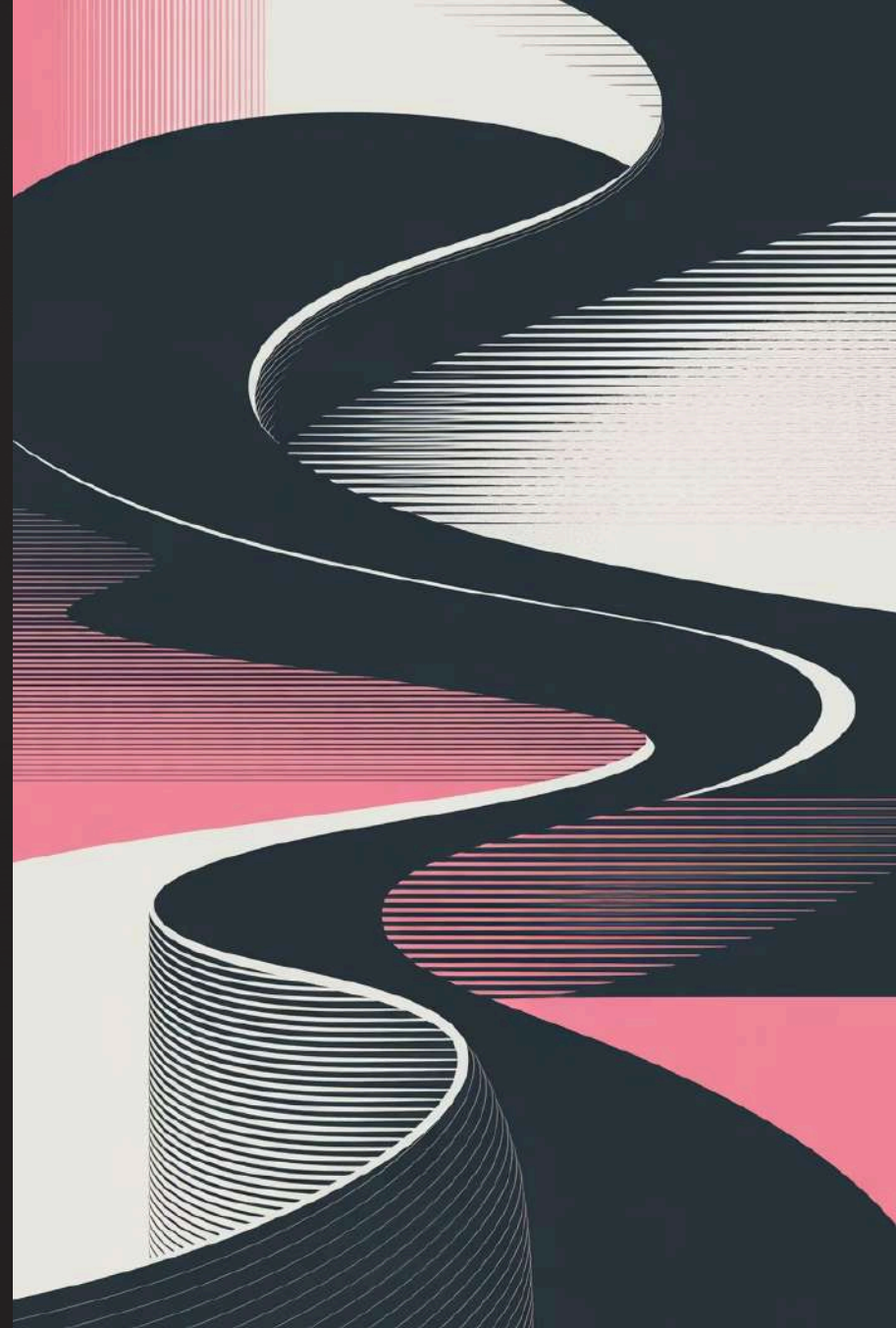


# Плотности распределения вероятностей входных величин

Лекция 8. Теорема Байеса. Виды распределений. Многомерное нормальное распределение.

Лектор: Байжұма Жандос Ескендірұлы

+ 7 707 556 60 08 / [zhandos.baizhuma@kaznu.edu.kz](mailto:zhandos.baizhuma@kaznu.edu.kz)



# Цель и основные вопросы лекции

01

## Плотность распределения

Понятие и применение плотности распределения вероятностей

02

## Теорема Байеса

Значение теоремы в оценке неопределенности измерений

03

## Виды распределений

Основные типы распределений входных величин

04

## Многомерное распределение

Свойства многомерного нормального распределения

05

## Практическое применение

Оценка итоговой неопределенности измерений

# Плотность распределения вероятностей

Плотность распределения – функция, описывающая распределение значений случайной величины. Показывает вероятность нахождения величины в заданном интервале.

Для непрерывных величин вероятность определяется как площадь под кривой:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

где  $f(x)$  – плотность распределения,  $X$  – случайная величина.

## Основные свойства

1.  $f(x) \geq 0$  для всех  $x$
2. Нормировка:  
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
3. Среднее:  
$$E[X] = \int x \cdot f(x)dx$$
4. Дисперсия:  
$$D[X] = \int (x - E[X])^2 f(x)dx$$

# Основные виды распределений



## Нормальное

Симметричное распределение для случайных ошибок и повторных измерений

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



## Равномерное

Все значения в интервале [a,b] равновероятны.  
Применяется для неопределенностей типа В

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$



## Треугольное

Аппроксимирует распределения с ограничениями на минимум и максимум

$$f(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, \quad a \leq x \leq c$$



## Логнормальное

Асимметричное распределение для положительных величин с правосторонним смещением

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$



# Применение распределений в оценке неопределенности



## Нормальное

Множественные независимые случайные воздействия, симметричные ошибки



## Равномерное

Неизвестное распределение в ограниченном диапазоне, все значения равновероятны



## Треугольное

Известная мода (наиболее вероятное значение), малые вероятности крайних значений



## Логнормальное

Только положительные величины: масса, время, мощность





# Теорема Байеса в оценке неопределенности

Теорема Байеса позволяет обновлять вероятностные оценки на основе новой информации, связывая **априорные** и **апостериорные** вероятности.

## Этапы расчета:

1. Приписывание неинформативного совместного распределения (априорного) неизвестным параметрам
2. Уточнение совместной плотности на основе наблюдений (апостериорная)
3. Интегрирование по области возможных значений дисперсии

❏ **Функция правдоподобия** – произведение значений плотностей распределения для полученных наблюдений

Апостериорная плотность = произведение априорной плотности на функцию правдоподобия с последующей нормировкой

# Дискретные и непрерывные распределения



## Дискретные

**Биномиальное:** вероятность  $k$  успехов из  $n$  испытаний

**Пуассона:** число событий за фиксированный интервал

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

## Экспоненциальное

Время между независимыми событиями с постоянной интенсивностью  $\lambda$ :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$



## Непрерывные

**Равномерное, нормальное, экспоненциальное, логнормальное**

Описываются функцией плотности  $f(x)$ , интеграл которой равен 1

## Логнормальное

Логарифм величины подчиняется нормальному закону. Для неотрицательных величин



# Многомерное нормальное распределение

Обобщение нормального распределения на случай нескольких взаимосвязанных случайных величин. Совместное поведение определяется ковариационной структурой.

Плотность вероятности для  $n$  переменных:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right)$$

$\mu$

Вектор средних значений  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$

$\Sigma$

Ковариационная матрица, описывающая связи между переменными

$|\Sigma|$

Детерминант ковариационной матрицы

$\Sigma^{-1}$

Обратная матрица ковариаций

Корреляция между входными величинами влияет на итоговую неопределенность измерений. Правильный выбор распределения критически важен для точной оценки.